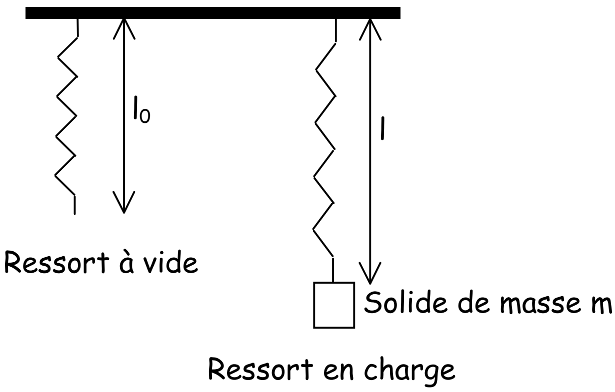
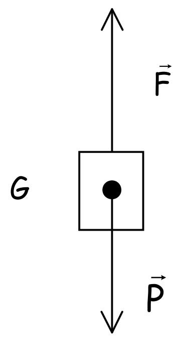
I. Force de rappel exercée par un ressort.

1. Rappel de 1ère S.

Déjà vue à propos des déformations élastiques comme exemple de force macroscopique : la force de rappel exercée par un ressort.
Après étalonnage, on construit ainsi les dynamomètres qui permettent de mesurer la valeur d'une force.





Dans le référentiel Terrestre, supposé galiléen, le solide de masse m est en équilibre sous l'action de 2 forces :

- Son poids $\vec{P}$
- La force de rappel exercée par le ressort $\vec{F}$.

D'après la 1ère loi de Newton appliquée au solide en équilibre :

$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$$

En valeur F = P

En 1ère S on avait conclu par $F = k \,.\, (l - l_0) = k \,.\, x$

<u>Avec</u> :

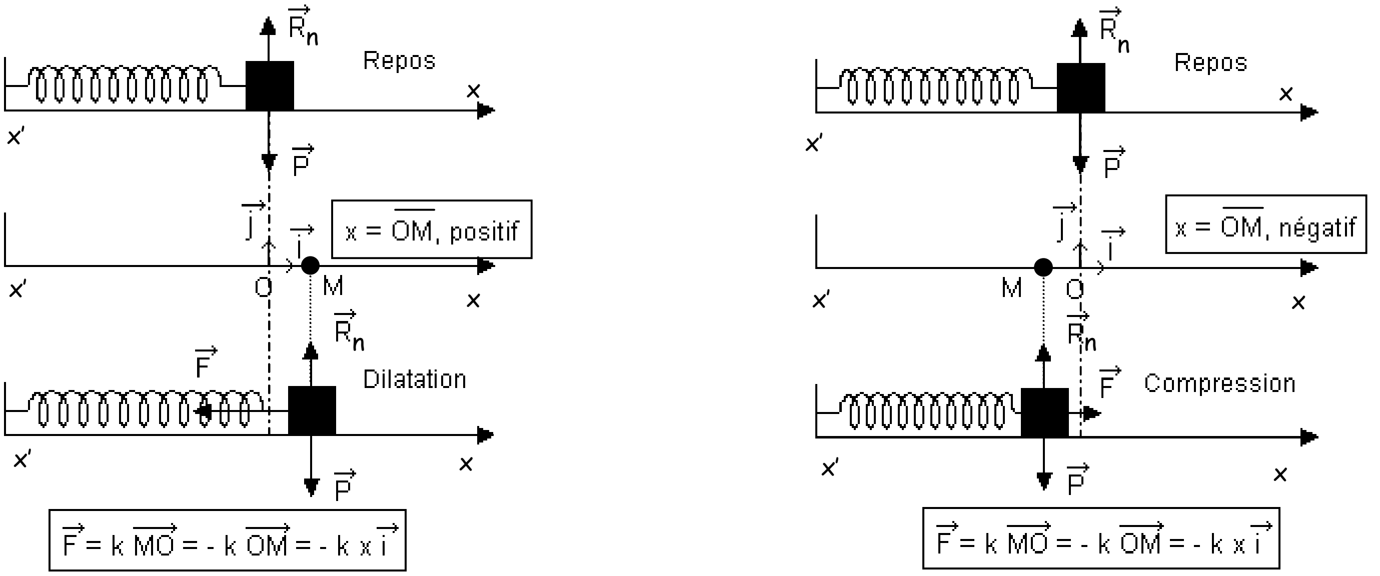
F = valeur en N de la force de rappel exercée par le ressort.
k = constante de raideur (ou raideur) du ressort en $N.m^{-1}$. Elle caractérise la rigidité du ressort.
x = allongement du ressort en m.

⇒ <u>Exercice</u> : montrer que la dimension de k est $M.T^{-2}$.

<u>Remarques :</u>

- Un ressort allongé exerce cette force de rappel à chacune de ses extrémités.
- Pour que la relation $F = k \,.\, (l - l_0) = k \,.\, x$ soit applicable il faut que les spires du ressort soient non jointives (ne se touchent pas quand il est à vide) et que la déformation soit linéaire (proportionnelle à la force exercée).
- L'allongement ne doit pas être trop grand sinon les déformations ne sont plus élastiques et le ressort reste déformé.
- On peut aussi comprimer un ressort alors $l < l_0$: la valeur de la force de rappel est $F = k \,.\, |l - l_0| = k \,.\, |x|$

2. Expression vectorielle de la force de rappel exercée par un ressort.



L'axe x'x est parallèle à l'axe du ressort (droite qui relie les centres des spires) orienté dans le sens de l'allongement de celui-ci (en général) et x = 0 est pris à la position de G à l'équilibre (au repos).

A chacune de ses extrémités un ressort, étiré ou comprimé, exerce une force de rappel dont l'expression est :

$$\boxed{\vec{F}_{rappel} = -\,k\,.\,x\,.\,\vec{i}}$$

Cette force est toujours dirigée vers O (position de repos).

- Ressort allongé ou dilaté : $l > l_0 \Rightarrow x > 0$: $\vec{F}_{rappel}$ a le sens inverse de $\vec{i}$
- Ressort comprimé : $l < l_0 \Rightarrow x < 0$: $\vec{F}_{rappel}$ a le même sens que $\vec{i}$

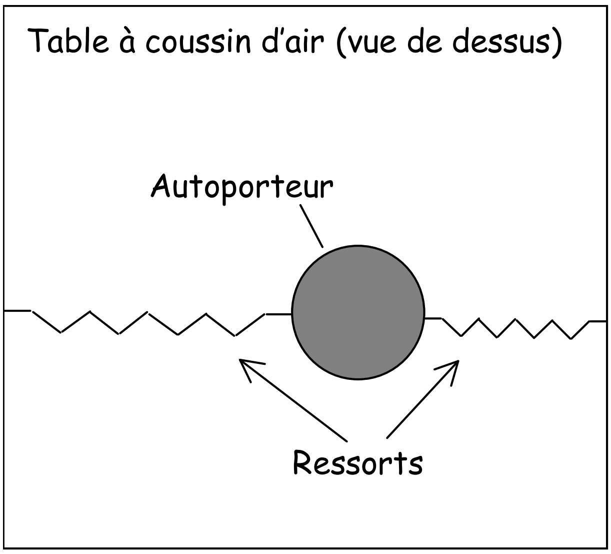
Remarques :

- En valeur $F = k\,.|x| > 0$
- En projection sur l'axe x'x : $F_x = -\,k\,.\,x$

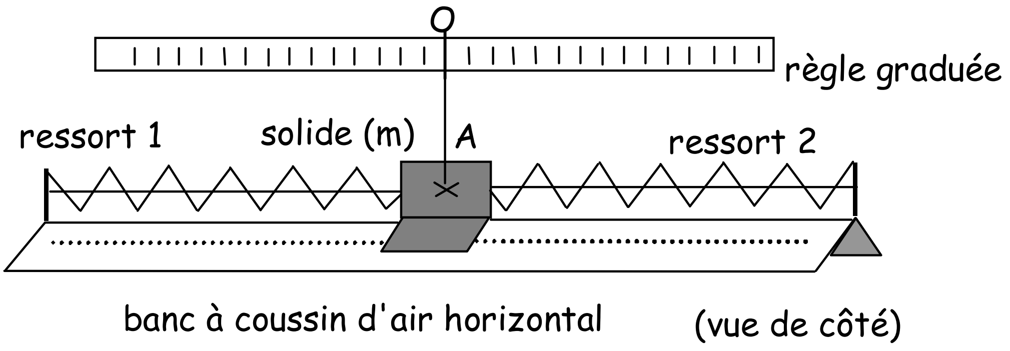
II. Etude dynamique du dispositif « solide-ressort »

1. Présentation du problème.

Le montage expérimental sera revu en TP : il est souvent le suivant.



On admettra que ce montage est équivalent à celui qu'on aurait avec un ressort unique de raideur $k = k_1 + k_2$.
Les deux ressorts assurent le guidage de l'autoporteur.
Sinon, avec un ressort unique il faut un dispositif qui assure le guidage du solide (rail ou banc par exemple).
<u>Exemple de l'exercice "Oscillateur solide - ressort" (5,5 pts) Nouvelle Calédonie Mars 2005.</u>



2. <u>Etude dynamique.</u>

Le mouvement du solide de centre d'inertie G est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. (A et G ont même mouvement car ils sont 2 points d'un même solide)
Le mouvement est rectiligne (à cause du banc), horizontal, suivant l'axe x'x orienté vers la droite.
L'origine des abscisses est choisie à la position G_0 quand le système est au repos.
Tous les frottements sont négligés.

Au cours de son mouvement le solide est soumis à 3 forces (schéma I.2)

- Son poids $\vec{P}$ (vertical, vers le haut, de valeur P = m.g)
- La réaction normale du banc $\vec{R}_n$ (perpendiculaire au banc, vers le haut, de valeur R_n = ?)
- La force de rappel exercée par le ressort $\vec{F}_{rappel} = - k \cdot x \cdot \vec{i}$

<u>D'après la $2^{ème}$ loi de Newton :</u>

$$\vec{P} + \vec{R}_n + \vec{F}_{rappel} = m \cdot \vec{a}_G$$

En projetant sur l'axe x'x (la projection d'une <u>SOMME</u> vectorielle est la <u>SOMME</u> des projections) il vient :

$$P_x + R_{nx} + F_x = m \cdot a_x$$

Avec $P_x = 0$, $R_{nx} = 0$ (toutes 2 perpendiculaires à x'x) , $F_x = - k \cdot x$ et $a_x = x''$ ou $\frac{d^2x}{dt^2}$

Ce qui conduit à : $- k \cdot x = m \cdot x''$ ou bien en divisant par m :

$$\boxed{x'' + \frac{k}{m} \cdot x = 0}$$

Cette équation a déjà été vue à l'occasion de l'étude des circuits LC. Mathématiquement elle est du type $y'' + \omega^2 \cdot y = 0$ (programme de mathématiques) où y est la fonction inconnue : c'est une équation différentielle du second ordre sans second membre.

3. Résolution analytique.

Montrons qu'une solution du type $x = x_m \,.\, \cos(2.\pi.\frac{t}{T_0} + \varphi_0)$ convient.

Avec :

- x = allongement algébrique (abscisse de G)
- x_m est l'amplitude du mouvement (toujours positive) : $-x_m \leq x \leq +x_m$
- T_0 est la période propre de l'oscillateur.
- $(2.\pi.\frac{t}{T_0} + \varphi_0)$ est la phase
- φ_0 = est la phase à l'origine des dates.

La méthode est habituelle : on calcule x' puis x'' et on remplace x et x'' dans l'équation différentielle.

- Dérivée première de x(t) : $x' = -x_m \,.\, \frac{2\pi}{T_0} \,.\, \sin(2.\pi.\frac{t}{T_0} + \varphi_0)$ NB : $x' = v_x$
- Dérivée seconde de x(t) : $x'' = -x_m \,.\, (\frac{2\pi}{T_0})^2 \,.\, \cos(2.\pi.\frac{t}{T_0} + \varphi_0)$ NB : $x'' = a_x$

En remplaçant dans l'équation différentielle :

$$-x_m.\,(\frac{2\pi}{T_0})^2.\,\cos(2.\pi.\frac{t}{T_0} + \varphi_0) + \frac{k}{m}\,x_m \,.\, \cos(2.\pi.\frac{t}{T_0} + \varphi_0) = 0$$

Mise en facteur de certains termes :

$$-x_m \,.\, \cos(2.\pi.\frac{t}{T_0} + \varphi_0) \,.\, [(\frac{2\pi}{T_0})^2 - \frac{k}{m}] = 0$$

Cette égalité doit être vérifiée $\forall\, t \Rightarrow [(\frac{2\pi}{T_0})^2 - \frac{k}{m}] = 0 \quad \Rightarrow (\frac{2\pi}{T_0})^2 = \frac{k}{m}$

D'où la période propre de cet oscillateur : $\boxed{T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}}$

Remarque : cette période ne dépend que des caractéristiques de l'oscillateur (la masse du corps lié au ressort, et la raideur du ressort) mais pas des conditions initiales. C'est pourquoi on l'appelle période propre parce qu'elle est propre au système (propriété du système).

$\Rightarrow$ Exercice : montrer que cette relation est homogène.

4. Influence des conditions initiales.

A l'instant t = 0 on étire (vers la droite) le solide de $x_0 > 0$ et on laisse aller sans vitesse initiale : $v_0 = 0$.

Soit en faisant t = 0 dans la solution générale : $x_0 = x_m \,.\, \cos(\varphi_0)$

De même pour la vitesse à t = 0 : $v_{0x} = -x_m \,.\, \frac{2\pi}{T_0}\, \sin(\varphi_0) = 0$

De ces 2 relations on en tire $x_m = x_0 > 0$ et $\varphi_0 = 0$ (la solution $\varphi_0 = \pi$ ne convient pas car x_m doit être positive).

D'où la solution dans ce cas : $\boxed{x = x_0 \,.\, \cos(2.\pi.\frac{t}{T_0})}$

III. Vérification expérimentale de la relation $T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$

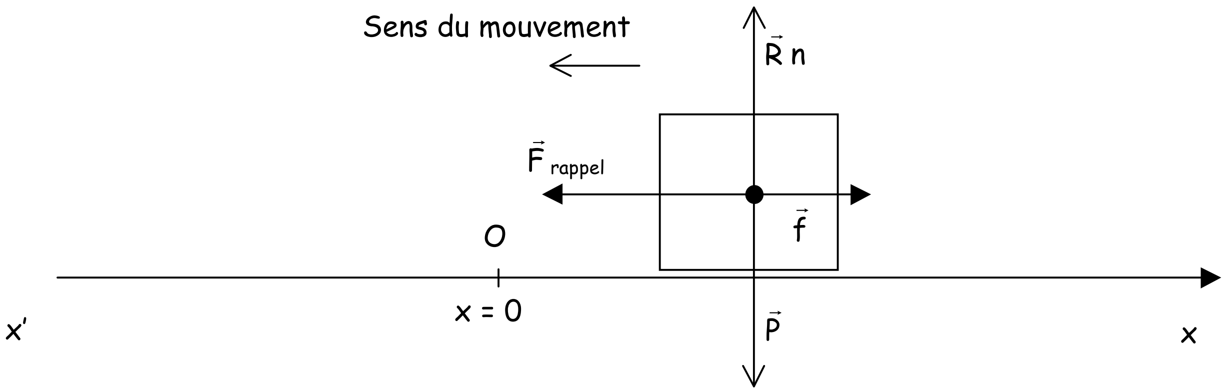
On admettra que le système vertical oscille à la même fréquence propre (ou période) que le dispositif horizontal et que les frottements sont négligeables.

1. Influence de m : proposez un protocole qui permet de le montrer.
2. Influence de k : même question.
3. Indépendance de g : voir document dans Ph 26
4. Indépendance de l'amplitude initiale.
5. Autre idée : de quoi pourrait dépendre T_0 ?

IV. Influence des frottements.

1. Equation différentielle.

Avec les mêmes définitions que ci-dessus, aux forces précédentes s'ajoute une force de frottement $\vec{f}$ dont la direction est celle du mouvement mais dont le sens est opposé à celui-ci. On peut avoir, par exemple, $\vec{f} = -\lambda.\vec{v}$ où λ est un coefficient dont la valeur augmente avec les frottements.



D'après la 2ème loi de Newton appliquée au solide au cours de son mouvement.

$$\vec{P} + \vec{R}_n + \vec{F}_{rappel} + \vec{f} = m \,.\, \vec{a}_G$$

En projection sur l'axe x'x :

$$P_x + R_{nx} + F_x + f_x = m \,.\, a_x$$

Soit :

$$-k \,.\, x - \lambda \,.\, v_x = m \,.\, a_x$$
$$-k \,.\, x - \lambda \,.\, x' = m \,.\, x''$$

En divisant par m et en ordonnant : $\boxed{x'' + \frac{\lambda}{m} \,.\, x' + \frac{k}{m} \,.\, x = 0}$

La résolution de cette équation différentielle du 2nd ordre sans second membre n'est pas au programme.

2. Les différents régimes du système.

Comme pour les circuits électriques RLC on retrouve les régimes suivants :

- Périodique de période propre $T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$ quand les frottements sont nuls.
- Pseudo périodique de pseudo période $T \approx T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$ quand les frottements sont faibles.
- Apériodique (pas d'oscillation) quand les frottements sont importants.

Application pratique : la suspension d'une automobile.

- Sans amortisseur les oscillations sont périodiques (en théorie) et les roues de la voiture oscillent à la fréquence propre : elles ne sont donc pas en contact permanent avec la route. C'est très dangereux : la voiture ne « tient » pas la route et ne peut pas freiner.
- Avec des amortisseurs fatigués les oscillations sont pseudo périodiques (cas réel) et c'est pratiquement la même chose pour la sécurité : la conduite est très dangereuse.
- Avec des amortisseurs inadaptés, prévus pour un véhicule beaucoup plus lourd, le régime est apériodique et le retour à la position d'équilibre prend trop de temps. La voiture est très inconfortable.
- En fait l'amortisseur idéal est celui qui empêche les oscillations et qui permet un retour rapide à l'équilibre (régime critique hors programme).

Exercices pour lundi 19 mai 2008 :
Ne pas traiter les parties relatives à l'énergie.

"Oscillateur solide - ressort" (5,5 pts) Nouvelle Calédonie Mars 2005 (à terminer).

"Evolution temporelle de deux oscillateurs" (9 pts) Liban 2003

"Energies d'un système solide-ressort" (4 pts) Asie 2004